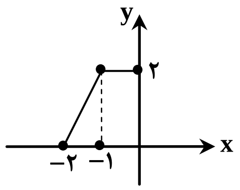
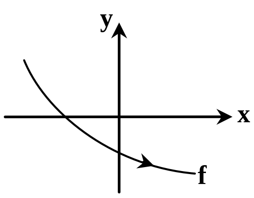
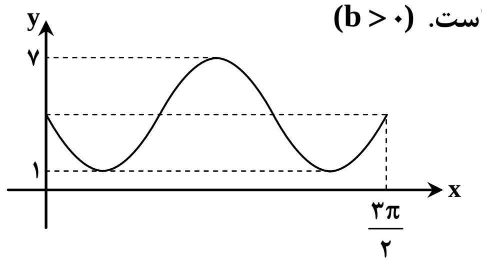
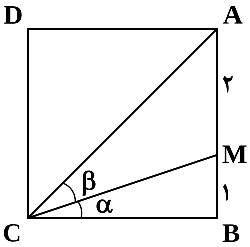
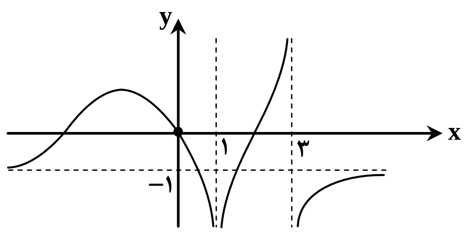
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. ب) دورهٔ تناوب تابع $y=8\operatorname{Cos}(\frac{x}{3})$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. پ) حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\operatorname{Sin}x}$ برابر $+\infty$ است. ت) تابعی وجود ندارد که دارای دو خط مجانب افقی باشد.	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) نمودار وارون تابع $y=(x-2)^3+1$ از ناحیهٔ .... محورهای مختصات عبور نمی‌کند. ب) تعداد جواب‌های معادلهٔ $\tan 5x=\tan x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ برابر .... است. پ) حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{[x]+3x}{9x^2+6x+1}$ برابر .... است. ت) اگر $x=-1$ مجانب قائم تابع $y=\frac{2ax-1}{x+a}$ باشد، آن‌گاه خط .... مجانب افقی آن است.	۲
۳	نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌صورت مقابل است.  الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید. ب) با توجه به نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $g(x)=-f(1+\frac{x}{2})$ را رسم کنید. پ) دامنه و برد تابع $g(x)$ را مشخص کنید.	۱/۵
۴	الف) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}1-(x-1)^3 & x<2\\ \sqrt{2x} & x\geq 2\end{cases}$ را رسم کنید. ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است را مشخص کنید. پ) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است را مشخص کنید.	۱/۵
۵	چندجمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ مفروض است. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $g(x)=f(x+1)$ بر $x-1$ و $x+2$ بخش‌پذیر باشد.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار تابع f است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(3x-4)\leq f(-2x+6)$ را به‌دست آورید. 	۱
۷	شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=a\operatorname{Sin}bx+c$ یا $y=a\operatorname{Cos}bx+c$ است. $(b>0)$  الف) مقادیر a، b و c را به‌دست آورید. ب) ضابطهٔ تابع را بنویسید.	۲

ردیف		نمره
۸	با توجه به محورهای سینوس و تانژانت در دایرهٔ مثلثاتی و با فرض $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$ مقادیر $\operatorname{Sin}\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم و مقادیر $\lvert \operatorname{Sin}\alpha \rvert$ و $\lvert \tan\alpha \rvert$ را با هم مقایسه کنید.	۱
۹	معادلهٔ مثلثاتی $\operatorname{Cos}۲x = ۳\operatorname{Sin}x - ۱$ را حل کنید.	۱/۵
۱۰	در مربع شکل مقابل، $AM = ۲$ و $BM = ۱$ است. مقدار $\tan\beta$ را به‌دست آورید.  	۱
۱۱	مجانب‌های قائم تابع $y = \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۲ + x - ۶}$ را بیابید و سپس نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.	۲
۱۲	حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. الف) $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{۲ - \operatorname{Cos}^۲ x}{x}$ ب) $\lim\limits_{x \to -۲} \frac{x - ۲}{x^۲ + ۴x + ۴}$ پ) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{۴x^۲ - x + ۱}{۲x^۳ - x + ۲}$ ت) $\lim\limits_{x \to +\infty} (۲x^۲ - x^۳)$	۲
۱۳	اگر $\lim\limits_{x \to ۲^-} \frac{[x] - a}{x - ۲} = +\infty$ باشد، حدود a را بیابید.	۱
۱۴	شکل زیر نمودار تابع f است. با توجه به نمودار f، هریک از عبارت‌های ستون اوّل به یکی از عبارت‌های ستون دوم مربوط است، آن‌ها را به هم وصل کنید. (در ستون دوم دو عبارت اضافه است.) **ستون اوّل** الف) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ت) معادلهٔ مجانب قائم **ستون دوم** ۱- $+\infty$ ۲- $y = ۳$ ۳- $x = ۳$ ۴- $-\infty$ ۵- $x = -۱$ ۶- $y = -۱$  	۱

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

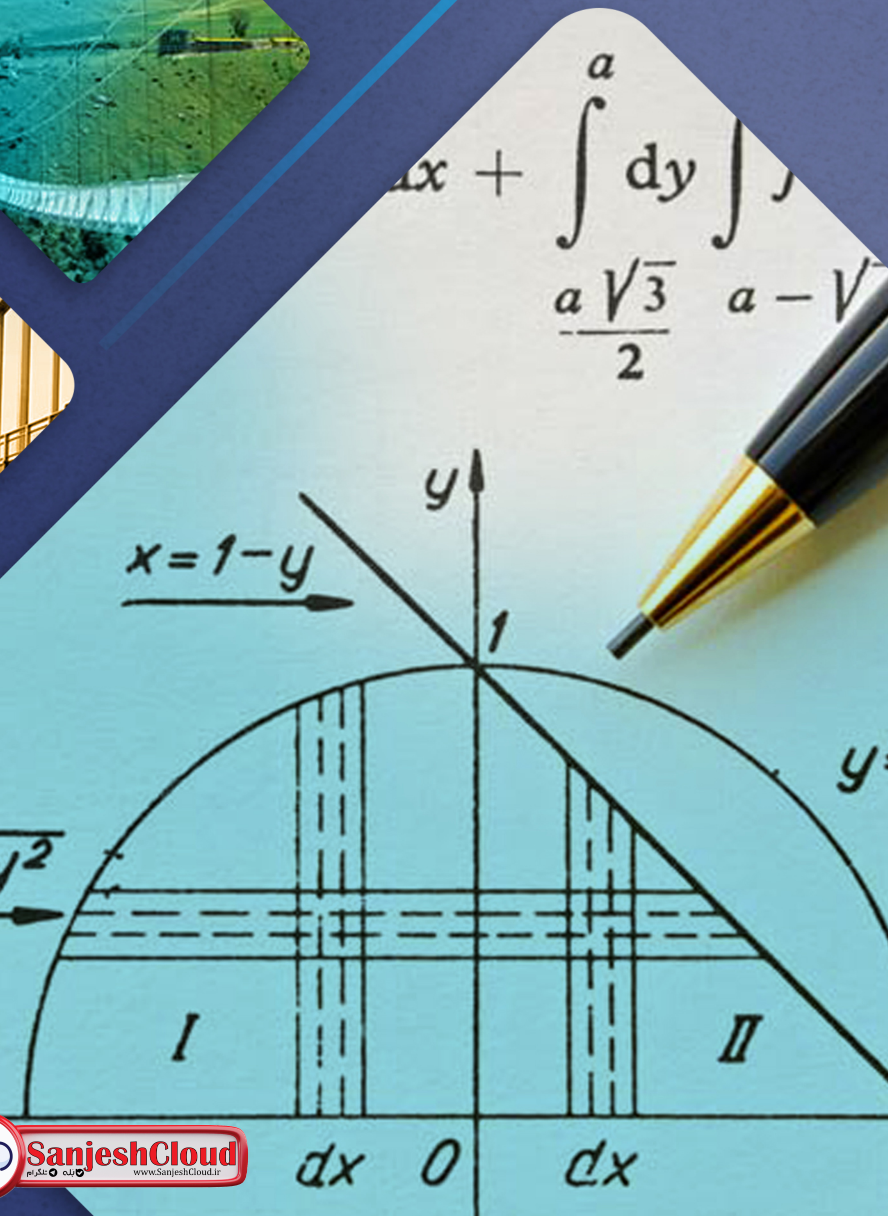
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

دی ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۲

حسابان ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۳_۱۴۰۴

-۱

الف) درست

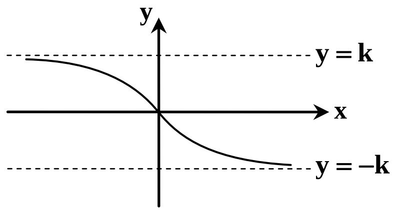
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.

ب) نادرست؛ دورهٔ تناوب تابع $y=a\operatorname{Cos}bx+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است؛ بنابراین $T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|}=۶\pi$

پ) نادرست

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\operatorname{Sin}x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

ت) نادرست؛ به عنوان مثال، نمودار تابع روبه‌رو را در نظر بگیرید:

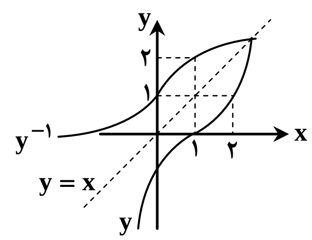


-۲

الف) چهارم

$$y=(x-۲)^۳+۱ \Rightarrow y^{-۱}=\sqrt[۳]{x-۱}+۲$$

با توجه به شکل، y از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند، مشخص است که وارون این تابع از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



ب) دو (۲)

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که در آن $k\in Z$.

$$\tan ۵x=\tan x \Rightarrow ۵x=k\pi+x \Rightarrow ۴x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}$$

$$x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in Z\ ,\ x\in(۰,\pi) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{۴} \\ x=\frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

پ) $-\infty$

نکته: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L\neq ۰$ و $\lim_{x\to a}g(x)=۰$، آن‌گاه:

اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۳}}\frac{[x]+۳x}{۹x^۲+۶x+۱}=\lim_{x\to -\frac{۱}{۳}}\frac{[x]+۳x}{(۳x+۱)^۲}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$$

ت) $y=۲$

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ ۳) $\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ ۴) $\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$

مجانب قائم $x=-۱ \Rightarrow -۱+a=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow y=\frac{۲x-۱}{x+۱}$

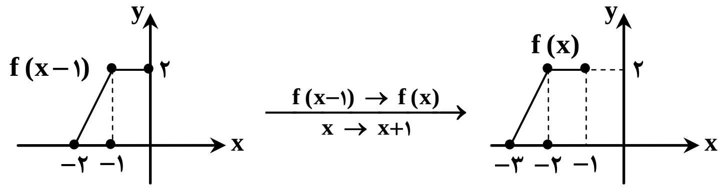
نکته: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$ برقرار باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x}=۲$$

-۳

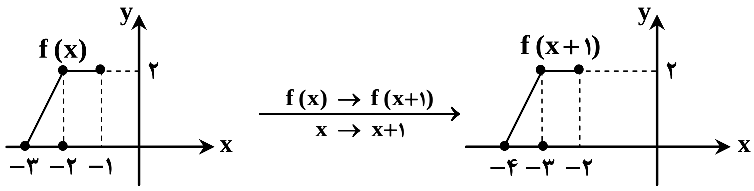
الف)

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم.

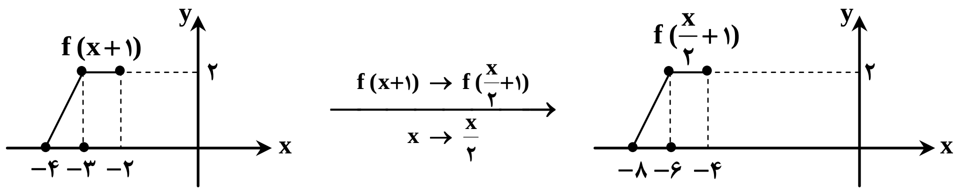


ب)

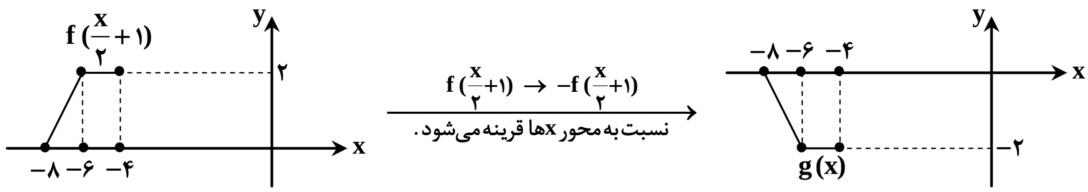
نکته برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم.



نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.



نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند؛ بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.



پ) دامنهٔ تابع $g(x)$، $[-8,-4]$ و برد آن $[-2,0]$ است.

-۴

الف)

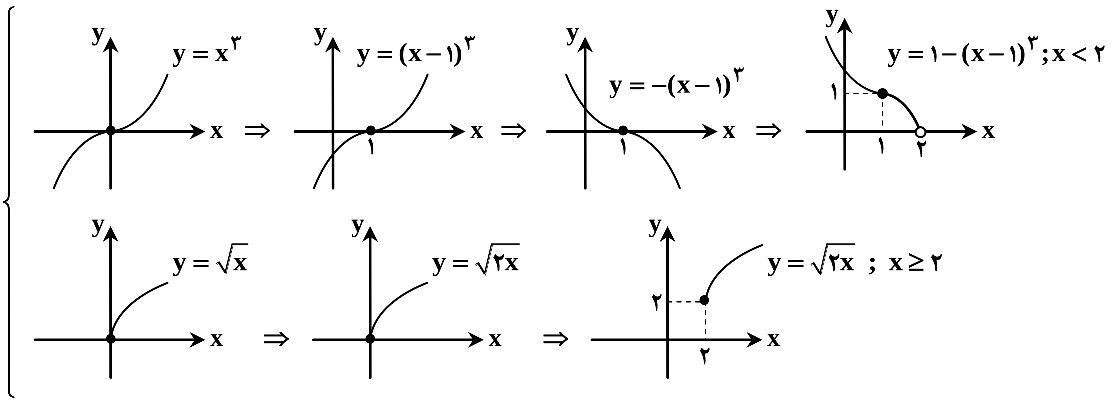
نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

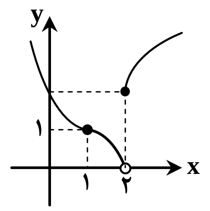
نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.



$\Rightarrow$ 

ب)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$، آن‌گاه $f(a) > f(b)$. در فاصله ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به پایین خواهیم رفت.

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع روی آن اکیداً نزولی است برابر است با $(-\infty, ۲)$

پ)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$، آن‌گاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع روی آن اکیداً صعودی است برابر است با $[۲, +\infty)$.

-۵

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

تابع بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس:

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

با جای‌گذاری $x=۱$ در تابع، داریم:

$$g(۱)=f(۲)=۰ \Rightarrow ۸+۴a+۲b+۲=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۵$$

تابع بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس:

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

با جای‌گذاری $x=-۲$ در تابع، داریم:

$$g(-۲)=f(-۱)=۰ \Rightarrow -۱+a-b+۲=۰ \Rightarrow a-b=-۱$$

حالا دستگاه زیر را حل می‌کنیم تا مقادیر a و b را به‌دست آوریم:

$$+\begin{cases} ۲a+b=-۵ \\ a-b=-۱ \end{cases}$$

$$۳a=-۶ \Rightarrow a=-۲ , ۲(-۲)+b=-۵ \Rightarrow b=-۱$$

-۶

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$، آن‌گاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به پایین خواهیم رفت.

با توجه به شکل، نمودار تابع f با دامنهٔ R اکیداً نزولی است؛ بنابراین:

$$f(۳x-۴) \leq f(-۲x+۶) \xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی است.}} ۳x-۴ \geq -۲x+۶ \Rightarrow ۵x \geq ۱۰ \Rightarrow x \geq ۲$$

۷-

الف)

نکته: توابع $y=a\operatorname{Sin}bx+c$ و $y=a\operatorname{Cos}bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به شکل، چون ماکزیمم یا مینیمم تابع روی محور عرض‌ها قرار ندارد، نمودار تابع $y=a\operatorname{Sin}bx+c$ داده‌شده است.

$$\begin{cases}|a|+c=7\\-|a|+c=1\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}2c=8\Rightarrow c=4\Rightarrow |a|+4=7\Rightarrow |a|=3$$

با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده که $b>0$ است و با توجه به نمودار تابع مشخص است که $ab<0$ است، پس داریم:

$$a=-3$$

$$\frac{3}{2}T=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow T=\pi$$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=2\xrightarrow{b>0}b=2$$

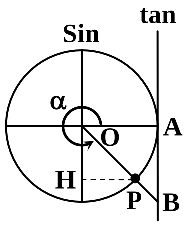
ب) ضابطهٔ تابع را می‌نویسیم:

$$y=-3\operatorname{Sin}(2x)+4$$

۸-

نکته: اگر نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، داریم:

$$\begin{cases}OH=\operatorname{Sin}\alpha\\AB=\tan\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Sin}\alpha>\tan\alpha\\|\operatorname{Sin}\alpha|<|\tan\alpha|\end{cases}$$ هر دو عدد منفی هستند.



۹-

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\operatorname{Sin}x=\operatorname{Sin}\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in Z$.

نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه داریم: $-1\le\operatorname{Sin}\alpha\le 1$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\operatorname{Cos}2x=1-2\operatorname{Sin}^2x$، داریم:

$$1-2\operatorname{Sin}^2x=3\operatorname{Sin}x-1\Rightarrow 2\operatorname{Sin}^2x+3\operatorname{Sin}x-2=0$$

حالا معادلهٔ به‌دست آمده را تجزیه و حل می‌کنیم.

$$(2\operatorname{Sin}x-1)(\operatorname{Sin}x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Sin}x=-2 \quad \text{غیرقابل‌قبول}\\ \operatorname{Sin}x=\frac{1}{2}\Rightarrow \operatorname{Sin}x=\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

۱۰-

نکته: $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad,\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

راه‌حل اول:

با توجه به شکل مشخص است که:

$$\tan\alpha=\frac{1}{3}$$

همچنین با توجه به اینکه شکل مربع است، داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}+\tan\beta}{1-\frac{1}{3}\times\tan\beta}=1\Rightarrow\frac{4}{3}\tan\beta=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\beta=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم:

$$\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$$

$$\tan\beta=\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

-۱۱

نکته (تعریف): خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

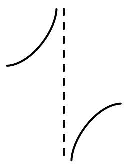
$$y=\frac{x^۲-x-۲}{x^۲+x-۶}=\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x+۳)(x-۲)}=\frac{x+۱}{x+۳}\ ,\ \text{دامنه}=R-\{۲,-۳\}$$

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

پس $x=-۳$ تنها مجانب قائم تابع است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۳^+}\dfrac{x+۱}{x+۳}=\dfrac{-۲}{۰^+}=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to -۳^-}\dfrac{x+۱}{x+۳}=\dfrac{-۲}{۰^-}=+\infty\end{cases}$$

با توجه به حاصل حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x=-۳$، شکل تابع را در اطراف مجانب قائم رسم می‌کنیم.



$x=-۳$

-۱۲

الف) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲-\cos^۲ x}{x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

ب)

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$، آن‌گاه:

$L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x-۲}{x^۲+۴x+۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{x-۲}{(x+۲)^۲}=\frac{-۴}{۰^+}=-\infty$$

پ)

نکته: اگر $f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a$ و $g(x)=b_m x^m+b_{m-۱}x^{m-۱}+\cdots+b_۱x+b$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲-x+۱}{۲x^۳-x+۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲}{۲x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x}=۰$$

ت)

نکته: اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

الف) اگر n زوج باشد: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n=+\infty$

ب) اگر n فرد باشد: $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty\end{array}\right.$

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x^۲-x^۳)=\lim_{x\to+\infty}(-x^۳)=-\infty$$

-۱۳

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ، آن‌گاه:

$L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-a}{x-2} = \frac{1-a}{0^-} = +\infty$$

مشخص است که صورت این عبارت منفی است، داریم:

$$1-a<0 \Rightarrow a>1$$

-۱۴

الف) ← ۴ ب) ← ۱ پ) ← ۶ ت) ← ۳